CHAPITRE V : ÉPAISSEURS

Nous n'avons jusqu'ici donné aucun moyen pour vérifier qu'une précapacité (qui n'est pas une capacité) est un calibre. Nous avons cependant cité l'exemple de la fonction J qui vaut 0 sur les ensembles (au plus) dénombrables et 1 sur les autres. Cette précapacité J est intimement liée à la capacité I qui vaut 0 sur l'ensemble vide et 1 sur les autres de la manière suivante : on a $J(A) = 1$ si et seulement si A contient les éléments d'une famille non dénombrable (K_i) de compacts disjoints tels que $I(K_i) = 1$ pour tout i. Au paragraphe 2, nous allons généraliser cette situation en définissant l'épaisseur J engendrée par une capacité I : en gros, un ensemble A aura une épaisseur $J(A) > t$ si A contient les éléments d'une famille non dénombrable (K_i) de compacts disjoints tels que $I(K_i) > t$ pour tout i. Et nous montrerons que l'épaisseur J est une précapacité et un calibre.
Nous étudierons au paragraphe 3 les ensembles d'épaisseur nulle, dont les ensembles semi-polaires en théorie du potentiel et les ensembles σ-finis en théorie des mesures de Hausdorff sont des exemples. Le paragraphe 4 contient des compléments dans le cas abstrait, et le paragraphe 1 est consacré à un théorème technique fondamental, que nous illustrerons en étudiant l'exemple le plus simple d'épaisseur cité au début.

1.- PRÉCAPACITÉS DICHOTOMIQUES

1 DÉFINITION.- Soit J une précapacité sur E. On dit que J est dichotomique si elle satisfait la condition suivante :

pour toute partie analytique A de E et tout $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $J(A) > t$, il existe deux compacts disjoints K_0 et K_1 tels que l'on ait $J(A \cap K_i) > t$ pour $i = 0,1$.

2 EXEMPLES.- 1) la précapacité J qui vaut 0 sur les ensembles dénombrables et 1 sur les autres est dichotomique. En effet, si A n'est pas dénombrable, on peut prendre pour K_0 et K_1 deux voisinages compacts disjoints de deux points de condensation distincts de A (cf le n.4 du chapitre III)

2) on peut montrer que la capacité newtonienne est dichotomique (cf CHOQUET [ ]).

Nous allons énoncer maintenant le théorème technique fondamental. Mais nous aurons besoin pour cela des notations suivantes.

3 Nous désignerons par D l'ensemble des "mots dyadiques" finis engendrés par 0 et 1, par D_n celui des mots de longueur n. Si m appartient à D, nous noterons $m0$ (resp $m1$) le mot obtenu en ajoutant 0 (resp 1) à l'extremité droite de m. L'ensemble $D_\infty = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ des mots dyadiques infinis sera muni de la topologie métrisable compact produit. Enfin, si μ appartient à D ou à D_∞, nous désignerons par μ_n le mot de longueur n constitué par les n premiers termes de μ (supposé de longueur $\geq n$ s'il est fini).

4 THÉORÈME.- Soit J une précapacité dichotomique sur E. Pour toute partie analytique A d'un produit $E\times F$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $J[\pi(A)] > t$ (où π désigne la projection sur E), il existe une application continue $\mu \to K_\mu$ de D_∞ dans $\underline{\underline{K}}(E\times F)$ satisfaisant les conditions

a) les compacts $\pi(K_\mu)$ sont disjoints dans E

b) la réunion des K_μ est un compact K inclus dans A

c) pour tout $\mu \in D_\infty$, on a $J[\pi(U)] > t$ pour tout ouvert U contenant K_μ

DÉMONSTRATION.- Rappelons que tout ensemble analytique est la projection d'un borélien élémentaire, i.e. d'un ensemble $\underline{\underline{K}}_{\sigma\delta}$. Comme pour le théorème de Sion, nous pouvons nous ramener au cas où A est $\underline{\underline{K}}_{\sigma\delta}$. Cela résulte aisément des faits suivant : la projection d'un ouvert est un ouvert; une projection "commute" avec les réunions quelconques; la restriction d'une projection aux parties compactes est continue pour la topologie de Hausdorff. Soit donc, pour chaque entier p, (L^p_q) une suite croissante de compacts, de réunion L^p, telle que $A = \bigcap_p L^p$. Notons d'abord que, si B est $\underline{\underline{K}}_\sigma$ dans $E\times F$ et si $J[\pi(A\cap B)] > t$, alors il existe deux compacts $\Delta_0(B)$ et $\Delta_1(B)$ contenus dans B, ayant leurs projections sur E disjointes, tels que l'on ait $J[\pi(A\cap\Delta_i(B))] > t$ pour $i = 0,1$: en effet, B étant la réunion d'une suite croissante de compacts (B_n), il existe un entier k tel que $J[\pi(A\cap B_k)] > t$, et, si K_0 et K_1 sont deux compacts disjoints de E tels que $J[\pi(A\cap B_k)\cap K_i] > t$ pour $i = 0,1$ (cf le n.1), il suffit de poser $\Delta_i(B) = B_k\cap(K_i\times F)$ pour $i = 0,1$. Nous allons définir maintenant, par récurrence, une application $m \to K_m$ de D dans $\underline{\underline{K}}(E\times F)$. Posons

$$K_0 = \Delta_0(L^1) \qquad\qquad K_1 = \Delta_1(L^1)$$

ce qui est possible, puisque L^1 est $\underline{\underline{K}}_\sigma$ et contient A, et, d'une manière générale, si m est de longueur n, et si K_m est défini,

$$K_{m0} = \Delta_0[K_m \cap L^{n+1}] \qquad K_{m1} = \Delta_1[K_m \cap L^{n+1}]$$

ce qui est possible, puisque $K_m \cap L^{n+1}$ est $\underline{\underline{K}}_\sigma$, que L^{n+1} contient A et que $J[\pi(A \cap K_m)] > t$ par construction. Notre application $\mu \to K_\mu$ de D_∞ dans $\underline{\underline{K}}(E\times F)$ sera alors définie par $K_\mu = \bigcap_n K_{\mu_n}$. Vérifions que cette application a bien les propriétés requises. D'abord, si m et m' sont deux mots finis distincts de même longueur, les compacts K_m et $K_{m'}$ ont leurs projections sur E disjointes, et donc les compacts $\pi(K_\mu)$ sont disjoints. Ensuite, on a, par distributivité, $K = \bigcup_\mu \bigcap_n K_{\mu_n} = \bigcap_n \bigcup_{m \in D_n} K_m$ car les K_m, pour $m \in D_n$, sont disjoints, et, l'ensemble D_n étant fini pour tout n, K est compact. D'autre part, comme K_{μ_n} est inclus dans L^n pour tout μ et tout n, K_μ est inclus dans A pour tout μ : le compact K est donc contenu dans A. Enfin, K_μ est l'intersection de la suite décroissante des compacts K_{μ_n} : si U est un ouvert de ExF contenant K_μ, U contient K_{μ_n} pour n assez grand, et donc on a $J[\pi(U)] > t$. Il ne reste plus à vérifier que l'application $\mu \to K_\mu$ est continue. Soit $\mu \in D_\infty$ et soient U_i des ouverts de ExF pour $i = 0,1,\dots,k$ tels que l'on ait $K_\mu \subset U_0$ et $K_\mu \cap U_i \neq \emptyset$ pour $i = 1,\dots,k$. Il existe alors des ouverts V_i tels que l'on ait $\overline{V}_i \subset U_i$ et $K_\mu \cap V_i \neq \emptyset$ pour $i = 1,\dots,k$. Et si n est un entier tel que K_{μ_n} soit contenu dans U_0, et si μ' appartient à l'ensemble ouvert $\{\nu \in D_\infty : \nu_n = \mu_n\}$, on a $K_{\mu'} \subset U_0$ et $K_{\mu'} \cap \overline{V}_i \neq \emptyset$ pour $i = 1,\dots,k$. La continuité de $\mu \to K_\mu$ est alors claire.

En fait, l'énoncé du théorème est un peu redondant : la continuité de $\mu \to K_\mu$ suffit pour assurer que $K = \bigcup K_\mu$ est compact. En effet, le graphe $\{(\mu,L) \in D_\infty \times \underline{\underline{K}}(E\times F) : L = K_\mu\}$ de cette application est compact, et on a, en symboles logiques,

$$(x,y) \in K \iff \exists\mu \quad \exists L \quad (x,y) \in L \quad \text{et} \quad L = K_\mu$$

REMARQUES.- 1) Le théorème se renforce de lui-même de la manière suivante. Soit $(\mu,\nu) \to \mu*\nu$ l'application continue de $D_\infty x D_\infty$ dans D_∞ définie de la manière suivante : le (2n-1)-ième (resp 2n-ième) terme de la suite $\mu*\nu$ est égal au n-ième terme de la suite μ (resp ν). Pour ν fixé, l'application partielle $\mu \to K_{\mu*\nu}$ satisfait les conditions de l'énoncé, et le compact K est alors la réunion des compacts à projections disjointes $L_\nu = \bigcup_\mu K_{\mu*\nu}$, chacun des compacts L_ν étant lui-même la réunion des compacts à projections disjointes $K_{\mu*\nu}$.

2) Bien entendu, l'application $m \to K_m$ construite dans la démonstration peut s'interpréter comme un schéma de Souslin particulier. Et, un schéma de Souslin $s \to K_s$ sur les compacts de E définit aussi une application continue $\sigma \to K_\sigma = \bigcap_{s<\sigma} K_s$ de Σ dans $\underline{\underline{K}}(E)$. La méthode de définition d'ensembles analytiques à l'aide de fonctions "semi-continues" de Σ dans l'ensemble des compacts d'un espace topologique séparé, introduite par ROGERS [ ], s'est révélée fructueuse dans le cadre topologique "général".

Dans la situation présente, comme dans celle du théorème de Sion, on ne peut en général rien dire de la valeur des $J[\pi(K_\mu)]$ et de $J[\pi(K)]$. Cependant, supposons que la précapacité J soit majorée par une capacité I : alors, d'après c), on a $I[\pi(K_\mu)] \geq t$ pour tout μ, et ainsi $\pi(K)$ est la réunion d'une famille non dénombrable de compacts disjoints de capacité $\geq t$. C'est un des arguments que nous utiliserons au paragraphe suivant pour démontrer qu'une épaisseur est un calibre. Bornons nous ici à étudier la plus simple des épaisseurs

5 THÉORÈME.- La fonction J qui vaut 0 sur les parties dénombrables de E et 1 sur les autres est un calibre.

DÉMONSTRATION.- Nous avons déjà vérifier au n.12-3) du chapitre IV que la restriction de J à $\underline{\underline{K}}(E)$ est une fonction analytique. Il nous reste à montrer que si A est analytique dans un produit ExF, et si $\pi(A)$ n'est pas dénombrable, alors A contient un compact K tel que $\pi(K)$ ne soit pas dénombrable. Mais, J est une précapacité dichotomique (cf le n.2-1)), et majore la capacité I qui vaut 0 sur l'ensemble vide et 1 sur les autres. Appliquons le théorème 4 : chaque K_μ est non vide, et donc le compact $\pi(K)$ est non dénombrable.

Nous allons obtenir comme corollaire deux théorèmes "classiques"

6 THÉORÈME (de Souslin).- Tout ensemble analytique non-dénombrable contient un compact non-dénombrable, et a la puissance du continu.

DÉMONSTRATION.- La première partie est une conséquence immédiate du théorème précédent, et la seconde, du fait connu depuis Cantor que tout parfait non vide a la puissance du continu. Mais, plus immédiatement, elle résulte tout simplement du fait que D_∞ a la puissance du continu.

7 THÉORÈME (de Mazurkiewicz-Sierpinski).- Soit A une partie analytique d'un produit ExF. L'ensemble des $y \in F$ tels que la coupe A(y) ne soit pas dénombrable dans E est analytique dans F.

DÉMONSTRATION.- On étend le calibre J en un calibre de ExF dans F (cf le n.11 du chapitre IV) et on applique le théorème 9 du même chapitre IV.

2.- ÉPAISSEURS

8 Dans toute la suite de ce chapitre, nous désignerons par I une capacité sur E, et nous supposerons que I satisfait les trois conditions suivantes

i) $I(\emptyset) = 0$

ii) si $I(A) = 0$ et $I(B) = 0$, alors $I(A \cup B) = 0$

iii) pour toute partie B de E, $I(B) = \inf I(A)$, $A \supset B$, A analytique

La condition i) sert à éviter des trivialités. La condition iii) est anodine lorsqu'on ne s'intéresse qu'aux ensembles analytiques : toute "capacité" definie seulement sur les parties analytiques peut être prolongée en une vraie capacité par le procédé de iii). Enfin, la condition ii) est vérifiée par la plupart des capacités usuelles; elle assure, avec la condition b) du n.1 du chapitre II, que la classe des ensembles de capacité nulle est stable pour (Ud).

Nous donnerons à la fin de ce paragraphe quelques exemples de capacités auxquelles il est intéressant d'appliquer les résultats de ce chapitre.

9 DÉFINITION.- On appelle épaisseur la fonction J sur $\mathfrak{P}(E)$ définie de la manière suivante

a) si A est analytique dans E, $J(A)$ est la borne supérieure des $t \geq 0$ tels que A contienne les éléments d'une famille non dénombrable d'ensembles analytiques disjoints de capacité $\geq t$.

b) si B est quelconque, $J(B) = \inf J(A)$, $A \supset B$, A analytique.

REMARQUE IMPORTANTE.- Comme tout ensemble analytique est I-capacitable, on peut remplacer "analytiques disjoints" par "compacts disjoints" dans a).

10 THÉORÈME.- L'épaisseur J est une précapacité dichotomique.

DÉMONSTRATION.- La fonction J est évidemment croissante. Pour vérifier que J est une précapacité, nous devons montrer que, si (A_n) est une suite croissante de réunion A, alors $J(A) = \sup J(A_n)$ On peut supposer $J(A) > 0$, et aussi que les A_n et A sont analytiques. Pour $t < J(A)$, soit $(H_\lambda)_{\lambda\in L}$ une famille non dénombrable d'ensembles analytiques disjoints telle que H_λ soit de capacité $> t$ et contenu dans A pour tout $\lambda\in L$. Comme I est une précapacité, il existe une application $\lambda \to n(\lambda)$ de L dans $\mathbb{N}$ telle que $I(A_{n(\lambda)} \cap H_\lambda) > t$ pour tout λ. L'ensemble L n'étant pas dénombrable, il existe alors un entier n tel que l'ensemble $\{\lambda\in L : I(A_n \cap H_\lambda) > t\}$ ne soit pas dénombrable, et on a alors $J(A_n) > t$. D'où $J(A) = \sup J(A_n)$. Vérifions maintenant que la précapacité J est dichotomique. Nous devons montrer que, si A est analytique et si $J(A) > t$, il existe deux compacts disjoints K_0 et K_1 tels que $J(A\cap K_i) > t$ pour $i = 0,1$. Soit encore $(H_\lambda)_{\lambda\in L}$ une famille non dénombrable d'ensembles disjoints, que nous supposerons ici compacts, telle que H_λ soit de capacité $> t$ et contenu dans A pour tout t. La famille (H_λ) est un sous-ensemble non dénombrable de $\underline{\underline{K}}(E)$. Soit H_0 et H_1 deux points de condensation de (H_λ) dans $\underline{\underline{K}}(E)$ appartenant à (H_λ) : H_0 et H_1 sont disjoints, et on peut prendre pour K_0 et K_1 deux voisinages compacts disjoints de H_0 et H_1 dans E.

11 THÉORÈME.- L'épaisseur J est un calibre.

DÉMONSTRATION.- Vérifions d'abord que si A est analytique dans un produit $E\times F$, alors $J[\pi(A)] = \sup J[\pi(K)]$, $K\subset A$, $K\in\underline{\underline{K}}(E\times F)$. Soit $t < J[\pi(A)]$. D'après le théorème 4, il existe une application continue $\mu \to K_\mu$ de D_∞ dans $\underline{\underline{K}}(E\mathrm{x}F)$ telle que i) les $\pi(K_\mu)$ soient disjoints ii) la réunion K des K_μ est un compact contenu dans A iii) on a $J[\pi(U)] > t$ pour tout ouvert U contenant K_μ, pour tout μ. On a ainsi $I[\pi(K_\mu)] \geq t$ pour tout μ, et donc $J[\pi(K)] \geq t$.

Vérifions maintenant que la restriction de J à $\underline{\underline{K}}(E)$ est une fonction analytique. Toujours d'après le théorème 4, le compact $L \in \underline{\underline{K}}(E)$ a une épaisseur $J(L) \geq t$ si et seulement s'il existe, pour tout rationnel $r < t$, une application continue $\mu \to K_\mu$ de D_∞ dans $\underline{\underline{K}}(E)$ telle que les K_μ soient disjoints, de capacité $\geq r$, et contenus dans L. L'application $\mu \to K_\mu$ étant continue, la famille (K_μ) est compacte dans $\underline{\underline{K}}(E)$: c'est donc un élément de $\underline{\underline{K}}[\underline{\underline{K}}(E)]$. En symboles logiques, on a

$$\begin{aligned} J(L) \geq t \quad = \quad & \forall r < t \quad \exists (K_\mu) \in \underline{\underline{K}}[\underline{\underline{K}}(E)] \ [\forall H \in \underline{\underline{K}}(E) \quad H \notin (K_\mu) \quad \text{ou} \quad H \subset L] \\ & \text{et} \quad [\forall H \in \underline{\underline{K}}(E) \quad H \notin (K_\mu) \quad \text{ou} \quad I(H) \geq r] \\ & \text{et} \quad [\forall (H,H') \in \underline{\underline{K}}(E) \mathrm{x} \underline{\underline{K}}(E) \quad H \notin (K_\mu) \quad \text{ou} \quad H' \notin (K_\mu) \quad \text{ou} \quad H = H' \\ & \qquad \text{ou} \quad H \cap H' = \emptyset] \end{aligned}$$

Pour r rationnel $< t$ fixé, le premier crochet définit un $CPC(\underline{\underline{G}} \cup \underline{\underline{K}}) = \underline{\underline{G}}_\delta$ le second également un $CPC(\underline{\underline{G}} \cup \underline{\underline{K}}) = \underline{\underline{G}}_\delta$ (la restriction de la capacité I à $\underline{\underline{K}}(E)$ étant une fonction s.c.s.), et le troisième définit un $CPC[CPC(\underline{\underline{G}} \cup \underline{\underline{G}} \cup \underline{\underline{K}} \cup \underline{\underline{G}})] = \underline{\underline{G}}_\delta$. Et donc, pour t fixé, l'ensemble des $L \in \underline{\underline{K}}(E)$ tels que $J(L) \geq t$ est $[P(\underline{\underline{G}}_\delta)]_\delta = \underline{\underline{A}}$. D'où l'analyticité de la fonction J.

Nous sommes maintenant en mesure de généraliser les théorèmes de Souslin et de Mazurkiewicz-Sierpinski du paragraphe précédent.

12 COROLLAIRE.- <u>Toute partie analytique</u> A <u>de</u> E <u>est</u> J-<u>capacitable</u>, <u>i.e.</u>

$$J(A) = \sup J(K),\ K \subset A,\ K \in \underline{\underline{K}}(E)$$

<u>En particulier</u>, <u>tout ensemble analytique d'épaisseur</u> > 0 <u>contient</u> <u>un compact d'épaisseur</u> > 0.

REMARQUE.- Le raffinement du théorème 4 (cf la remarque 1) du n.4) permet de conclure qu'un ensemble analytique A d'épaisseur $J(A) > t$ contient un compact K égal à la réunion d'une famille "continue" de compacts disjoints d'épaisseur $>t$.

13 COROLLAIRE.- Soit A une partie analytique d'un produit $E \times F$. La fonction qui, à $y \in F$, associe l'épaisseur de la coupe $A(y)$ est analytique sur F. En particulier, l'ensemble des $y \in F$ tels que $A(y)$ ait une épaisseur >0 est analytique dans F.

Voici maintenant quelques exemples de capacités que nous retrouverons plus loin. La compréhension de certains nécessite des connaissances specialisées.

14 EXEMPLES.- 1) Le premier a été deja vu : I est la capacité qui vaut 0 sur l'ensemble vide et **1** sur les autres. Chacun des autres exemples contiendra celui-ci comme cas particulier.

2) Soit $\mathcal{L}$ un ensemble de mesures sur E compact pour la topologie vague (rappelons que la famille filtrante de mesures (λ_i) converge vaguement vers la mesure λ si $(\lambda_i(f))$ converge vers $\lambda(f)$ pour toute fonction continue f sur E; cette topologie est métrisable, et un ensemble vaguement fermé $\mathcal{L}$ est compact si $\sup \lambda(1)$, $\lambda \in \mathcal{L}$, est fini). Pour tout ensemble analytique A, posons $I(A) = \sup\limits_{\lambda \in \mathcal{L}} \lambda(A)$ et prolongeons I suivant le procédé du n.8-iii). La fonction I ainsi définie est une capacité qui satisfait les conditions du n.8. Le seul point non évident à vérifier est que $I(\inf K_n) = \inf I(K_n)$ pour toute suite décroissante de compacts (K_n). Mais cela résulte du fait que, pour $K \in \underline{\underline{K}}(E)$ fixé, l'application $\lambda \to \lambda(K)$ est s.c.s. pour la topologie vague, et du "théorème du minimax" qui assure

que, si (f_n) est une suite décroissante de fonctions s.c.s. sur un compact F, alors $\inf_n \sup_y f_n(y) = \sup_y \inf_n f_n(y)$.

3) Cet exemple fait appel aux définitions et notations habituelles des processus de Markov. Soit (P_t) une semi-groupe de Hunt sur E, vérifiant l'hypothèse d'absolue continuité, et soit λ une mesure de référence. Pour tout ensemble analytique A, désignons par T_A son temps d'entrée (pour la réalisation canonique) et posons $I(A) = P^{\lambda}\{T_A < +\infty\}$. On peut alors prolonger I en une capacité vérifiant les conditions du n.8. Les ensembles de capacité nulle pour I sont les ensembles polaires pour le processus.

4) Cet exemple sera développé au chapitre VI. Soit α une fonction croissante et continue sur $\underline{\underline{K}}(E)$, telle que l'on ait $\alpha(K) > 0$ si K a au moins deux points. Posons $I(\emptyset) = 0$, et, pour toute partie A non vide, $I(A) = \inf \Sigma\, \alpha(K_n)$ où (K_n) est un recouvrement dénombrable de A par des compacts, et où l'inf est pris sur l'ensemble de ces recouvrements. Nous verrons que l'on définit ainsi une capacité vérifiant les conditions du n.8 (le point difficile à vérifier est que $I(\sup A_n) = \sup I(A_n)$ pour toute suite croissante (A_n)).

5) Cet exemple est étudié, sous des hypothèses un peu différentes, dans DELLACHERIE **[25]**. Prenons pour E un espace produit FxG, et soient λ une mesure sur F, π la projection de FxG sur F. La capacité est ici définie par $I(A) = \lambda^*[\pi(A)]$, pour A partie de FxG.
On peut montrer que, pour A analytique, l'épaisseur $J(A)$ est égale à la mesure $\lambda[\rho(A)]$ où $\rho(A)$ désigne l'ensemble des $y \in F$ tels que la coupe $A(y)$ ne soit pas dénombrable (on sait que $\rho(A)$ est analytique - et donc λ-mesurable - d'après le théorème 7).

3.- ENSEMBLES MINCES

Très souvent la capacité I n'est qu'un "outil" , comme dans l'exemple 14-3) en théorie des processus de Markov, ou dans l'exemple 14-4) en théorie des mesures de Hausdorff. La fonction épaisseur J n'a alors qu'un intérêt mineur. Par contre, les ensembles de capacité nulle sont souvent intéressants (dans l'exemple 14-3), ce sont les ensembles polaires; dans l'exemple 14-4), ce seront les ensembles de mesure de Hausdorff nulle), et aussi les ensembles d'épaisseur nulle, dont la définition ne fait intervenir en fait que la classe des ensembles de capacite nulle : ils se présentent souvent comme des ensembles "exceptionnels" de la théorie envisagée. Aussi poserons nous

15 DÉFINITION.- *Une partie de* E *est dite* mince *si son épaisseur est nulle*.

Nous allons nous intéresser particulièrement aux rapports entre ensembles minces et compacts minces.

16 THÉORÈME.- *Un ensemble analytique* M *est mince si et seulement s'il existe une suite* (K_n) *de compacts minces et un ensemble analytique* N *de capacité nulle tels que* $M = (\bigcup_n K_n) \cup N$. *Si* M *est mince, il existe une telle représentation où les compacts* K_n *sont disjoints, et disjoints de* N.

DÉMONSTRATION.- Supposons M mince et $I(M) > 0$. Et soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des familles de compacts disjoints contenus dans M et de capacité > 0. L'ensemble $\mathcal{K}$ n'est pas vide d'après le théorème de capacitabilité, et est évidemment inductif pour la relation d'ordre d'inclusion.

D'autre part, M étant mince, tout élément de $\mathcal{K}$ est dénombrable. On peut alors prendre pour (K_n) un élément maximal de $\mathcal{K}$, l'ensemble analytique $N = M - (\cup K_n)$ étant de capacité nulle d'après le théorème de capacitabilité et le caractère maximal de cette famille. Pour établir la réciproque, il suffit de montrer que l'ensemble des parties minces est stable pour $(\cup d)$, ce qui résulte aisément du fait que l'épaisseur J est une précapacité et de la condition ii) du n.8 imposée à la capacité I.

REMARQUE.- On peut montrer qu'un ensemble analytique M est mince si et seulement s'il satisfait la condition suivante : si $(M_\lambda)_{\lambda\in L}$ est une famille quelconque d'ensembles boréliens contenus dans M, il existe un sous-ensemble dénombrable L_0 de l'ensemble d'indices L tel que l'ensemble analytique $M_\lambda - (\bigcup_{\ell\in L_0} M_\ell)$ soit de capacité nulle pour tout $\lambda\in L$ (cf DELLACHERIE [ ]).

Nous allons démontrer maintenant le théorème essentiel de ce paragraphe. Afin d'en simplifier l'énoncé, nous poserons la définition suivante

17 DÉFINITION.- Un ensemble $\underline{\underline{H}}$ de parties de E est appelé une horde s'il satisfait les conditions suivantes

a) l'ensemble $\underline{\underline{H}}$ contient toutes les parties de capacité nulle

b) si A appartient à $\underline{\underline{H}}$ et B est inclus dans A, alors B appartient aussi à $\underline{\underline{H}}$ (autrement dit, $\underline{\underline{H}}$ est héréditaire)

c) l'ensemble $\underline{\underline{H}}$ est stable pour $(\cup d)$

d) tout élément de $\underline{\underline{H}}$ est contenu dans un ensemble analytique appartenant à $\underline{\underline{H}}$.

Ainsi, l'ensemble des parties de capacité nulle est la plus petite des hordes. L'ensemble des parties minces est aussi une horde d'après la définition de l'épaisseur J et le théorème 16.

Voici le théorème annoncé. Les formulations a) et b) que nous en donnons sont évidemment équivalentes

18 THÉORÈME.- Soit $\underline{\underline{H}}$ une horde d'ensembles minces.

a) Pour qu'un ensemble analytique A appartienne à $\underline{\underline{H}}$, il faut et il suffit que tout compact inclus dans A appartienne à $\underline{\underline{H}}$.

b) Pour qu'un ensemble analytique A n'appartienne pas à $\underline{\underline{H}}$, il faut et il suffit que A contienne un compact qui n'appartienne pas à $\underline{\underline{H}}$.

DÉMONSTRATION.- Nous démontrerons le théorème sous la forme b). La condition est évidemment suffisante, $\underline{\underline{H}}$ étant héréditaire. Montrons sa necessité. Soit A un ensemble analytique n'appartenant pas à $\underline{\underline{H}}$: si A est mince, le théorème résulte du théorème 16 d'après les propriétés a) et c) du n.17 ; si A a une épaisseur > 0, le théorème résulte du théorème 12, tout élément de $\underline{\underline{H}}$ étant mince par hypothèse.

Avant de revenir aux exemples du n.14, nous dégagerons encore une horde intéressante d'ensembles minces.

19 DÉFINITION.- Un ensemble analytique A est dit σ-fini pour la capacité I s'il existe sur E une mesure σ-finie λ satisfaisant la condition suivante : les ensembles λ-négligeables contenus dans A sont de capacité nulle. Une partie quelconque est dite σ-finie pour la capacité si elle est contenue dans un ensemble analytique σ-fini.

On peut évidemment supposer la mesure λ bornée, toute mesure σ-finie étant équivalente à une mesure bornée. D'autre part, la définition ne fait intervenir en fait que la classe des ensembles de capacité nulle, et il est clair que les ensembles σ-finis forment une horde d'ensembles minces (si A est de capacité nulle, on peut prendre $\lambda = 0$). Enfin, si A est σ-fini, il n'est pas difficile de voir que l'on peut choisir λ de sorte que les ensembles λ-négligeables contenus dans A coïncident avec les ensembles de capacité nulle contenus dans A.

Nous reprenons maintenant les exemples du n.14, en conservant leur numérotation et leurs notations

20 EXEMPLES.- 1) L'ensemble vide est le seul ensemble de capacité nulle. Les ensembles minces sont les ensembles dénombrables, qui sont aussi σ-finis. Le théorème 18, appliqué à la horde des ensembles minces, redonne le théorème de Souslin.

2) Un ensemble analytique A tel que l'ensemble $\{\lambda \in \mathcal{L} : \lambda(A) > 0\}$ soit dénombrable est σ-fini, et les parties de E contenues dans un ensemble analytique de ce type constituent une horde d'ensembles σ-finis. Le théorème 18, appliqué à cette horde, donne : si A est analytique, et si l'ensemble $\{\lambda \in \mathcal{L} : \lambda(A) > 0\}$ n'est pas dénombrable, alors A contient un compact K tel que l'ensemble $\{\lambda \in \mathcal{L} : \lambda(K) > 0\}$ ne soit pas dénombrable.

3) Les ensembles polaires sont les ensembles de capacité nulle, et on peut montrer que les ensembles semi-polaires forment une horde d'ensembles σ-finis. Le théorème 18, applique à cette horde, donne : un ensemble analytique qui n'est pas semi-polaire contient

un compact qui n'est pas semi-polaire.

4) Nous verrons au chapitre suivant que les ensembles σ-finis pour la mesure de Hausdorff engendrée par la fonction α forment une horde d'ensembles σ-finis pour la capacité. Le théorème 18 donnera alors : tout ensemble analytique non σ-fini pour la mesure de Hausdorff contient un compact non σ-fini pour cette mesure.

5) On peut montrer que tout ensemble mince est σ-fini. Sous les hypothèses un peu différentes de DELLACHERIE [ ] (F est sans structure topologique, et $G = \overline{\mathbb{R}}_+$), le théorème 18 et le théorème de section (n.9 du chapitre II) permettent d'obtenir des résultats importants en théorie des processus sur les ensembles à coupes dénombrables.

Un problème important, et souvent difficile, est celui de prouver que deux hordes d'ensembles minces sont identiques. En voici deux exemples : en théorie des processus de Markov, "si les points sont semi-polaires, est-ce que tout ensemble mince est semi-polaire ? (non résolu)"; en théorie des mesures de Hausdorff, " un ensemble mince est-il toujours σ-fini pour la mesure de Hausdorff ? (partiellement résolu)". Etant donné le théorème 16, il suffit d'étudier les compacts minces. Nous n'aborderons pas ici le problème général, et nous nous contenterons d'illustrer les méthodes connues pour aborder ce problème en étudiant au chapitre suivant le cas des mesures de Hausdorff.

4.- COMPLÉMENTS

Une grande partie de ce chapitre fait intervenir des arguments essentiellement topologiques, en particulier dans l'étude de l'épaisseur (topologie de Hausdorff, notion de calibre), qui n'ont pas d'équivalents dans le cas abstrait. Cependant, "l'essentiel" du théorème technique du n.4 est encore valable, ce qui permet d'obtenir encore le théorème 18 par des voies différentes. Nous nous bornerons à placer ce théorème dans un cadre abstrait, renvoyant le lecteur à DELLACHERIE [ ] pour plus de détails.

21 Nous désignons maintenant par $(E,\underline{\underline{E}})$ un espace pavé, où le pavage est supposé satisfaire les deux conditions suivantes

i) il est stable pour $(\cap d)$

ii) le complémentaire d'un élément de $\underline{\underline{E}}$ appartient à $\underline{\underline{E}}_\sigma$

Et on se donne une capacité I sur $(E,\underline{\underline{E}})$, vérifiant les conditions du n.8. Un ensemble $\underline{\underline{E}}$-analytique est dit mince s'il ne peut contenir les éléments d'une famille non dénombrable d'ensembles $\underline{\underline{E}}$-analytiques disjoints de capacité > 0. On définit la notion de horde comme au n.17, et on a l'analogue du théorème 18

22 THÉORÈME.- Soit $\underline{\underline{H}}$ une horde d'ensembles minces. Pour qu'un ensemble $\underline{\underline{E}}$-analytique A n'appartienne pas à $\underline{\underline{H}}$, il faut et il suffit que A contienne un élément de $\underline{\underline{E}}$ qui n'appartienne pas à $\underline{\underline{H}}$.